رد پای ریاضیات در موسیقی

جمشید سعیدیان
استادیار دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی
مهسا شبرنگ مریدانی
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه خوارزمی

چکیده

هنر در طول تاریخ، وسیله‌ای برای سازگاری، خلاقیت، ابراز عشق، دوستی و آرامش مردم بوده است. در میان هنرها، موسیقی به‌دلیل داشتن انرژی، تحرک و جاذبهٔ ذاتی، بسیار نافذ بوده و به طرز فوق‌العاده‌ای بشر را به خود مشغول کرده است. در ذهنیت بسیاری از افراد، دنیای ریاضی در تقابل با ویژگی‌های بی‌نظیر موسیقی است. لیکن این تفکر برخلاف آن است که در واقعیت رخ می‌دهد. همان‌طور که همیلتون (ریاضی‌دان ایرلندی) بیان نموده، «هنر و ریاضی مانند یکدیگرند زیرا در هر دو تقارن، تناظر و تطابق وجود دارد.»

هدف این مقاله، آشکار نمودن رد پای ریاضی در موسیقی است.

کلیدواژه‌ها: ریاضی، هنر، موسیقی، ریاضیات در موسیقی

مقدمه

ریاضیات و موسیقی، هر یک به نوبهٔ خود از ابتدای خلقت در مسیر تکامل تمدن بشری، نقش مؤثری داشته‌اند. ریاضیات به‌طور مستقیم، با پیشرفت شاخه‌های مختلف علوم تجربی، نظری، مهندسی و غیره، در ارتباط بوده و موسیقی علاوه بر تأثیر مستقیم بر سایر هنرها، همه‌روزه در حال تعامل با انسان در تمام نقاط جهان است، به گونه‌ای که از آن، حتی به‌عنوان ابزاری برای جهت دادن به پدیده‌های اجتماعی، سیاسی و فرهنگی استفاده می‌شود. برای بسیاری از مردم که با ریاضیات سروکاری ندارند، فرمول‌ها و قوانین ریاضی ، ممکن است خشک و پیچیده به‌نظر آیند و گاهی هم برای آن‌ها، به‌عنوان رمز و رازی که در دنیای اعداد، نشانه‌ها و علائم عجیب و غریب وجود دارد، مطرح می‌شود. بسیاری از افراد بر این باورند که ریاضیات یک علم عقلانی است و حداکثر توانایی آن، مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی است. حال آنکه اگر به مسائل و رخدادهای اجتماعی نگاهی بیندازیم، در می‌یابیم که مثلاً توزیع پدیده‌های تصادفی اجتماعی غالباً از رفتار توزیع نرمال «گاوس»[1] پیروی می‌کند، بنابراین نمی‌توان به این صراحت، از ریاضیات به‌عنوان یک علم صرفاً نظری و محض، نام برد. اما اگر ریاضیات با عقل انسان در ارتباط است، در مقابل موسیقی را می‌توان از مهم‌ترین هنرهایی دانست که به سادگی، روح آدمی را تحت‌تأثیر خود قرار می‌دهد و در جوامع مختلف، تا حد زیادی، با زندگی مردم عجین شده است.

جالب این است که از نظر بسیاری، ریاضیات که علمی عقلی تصور می‌شود، با موسیقی که بیشتر احساسی است، مشابهت‌ها و همگرایی‌های بسیاری دارند. در این مقاله، ابتدا نشان خواهیم داد که ریاضیات و موسیقی، دو

پدیده دور از هم نیستند. در واقع، موسیقی برخاسته از طبیعت و ریاضیات و زبان طبیعت است و نگاه دقیق‌تر به ماهیت ایـــن دو، وجود ارتباطی منطقی بین اجزای این دو پدیده را نشان خواهد داد. هدف این مقاله، ارائهٔ توصیفی کلی از روابط پیچیده بین این دو موضوع نیست و قصد نداریم از جزئیات ارتباطی بین شاخه‌های مختلف ریاضی مثل جبر خطی یا آنالیز هارمونیک با موسیقی، صحبت کنیم، بلکه هدف اصلی، نشـــان دادن بعضی از ارتباط‌های زیبا بین موسیقی و ریاضی است. ارتباطی که ای بسا علاقه‌مندی موسیقی‌دانان به ریاضیات و عشق ریاضی‌دانان به موسیقی در تاروپود آن نهفته باشد.

انگیزه‌های بررسی ارتباط ریاضیات و موسیقی

از بین هنرها، این مهم که ریاضیات و موسیقی به‌طور باطنی در ارتباط با هم هستند و بر یکدیگر تأثیر دارند، موضوعی پذیرفته شده است. حال اینکه چگونگی این ارتباط و تبیین میزان تأثیر ابعاد متفاوت این دو پدیده بر روی هم، تا حد زیادی مغفول مانده است. این مقاله و مطالعات مشابه می‌توانند مقدمه‌ای برای کشف و تبیین دقیق‌تر ارتباط و تعامل بین ریاضیات و موسیقی باشد، اما نویســـندگان این مقاله، براساس مشاهدات تجربی و نظری خود، تعامل بین ریاضی و موســـیقی را به‌طور غیررسمی، به سه رده یا عنوان دسته‌بندی نمودند:

دسته اول: ســـاختار ریاضی و موسیقی، هر دو ساختارمند و قائم به نظم هستند. ساختار ریاضی بر پایهٔ اصول موضوعی قضایا و گزاره‌های دقیق اســـتوار است و موســـیقی نیز، دارای نظم غیرقابل عدولی در ساختار و نت‌هاســـت، به گونه‌ای که هر تغییری هرچند جزئی، بر موزون بودن موسیقی، تأثیر به‌سزایی دارد. به‌عنوان مثال، آوردن مطالب اضافه در یک تعریف ریاضی، باعث ایجاد مشـــکل در اثبات قضایای مرتبط می‌شود، یعنی تعریف باید جامع و مانع باشد. همچنان که در موسیقی نیز، هر نت نابه‌جا، نظم آهنگ را تغییر می‌دهد. به علاوه، ویژگی ســـازگاری، هم در ریاضی و هم در موســـیقی، جایگاه ویژه‌ای دارد و از ارکان زیبایی و نظم است که هر دو حوزه، از آن برخوردارند.

دسته دوم: شـــواهد تاریخی گـــواه بعدی این است که بســـیاری از ریاضی‌دانان به‌نوعی در گرایشی از موســـیقی با علاقه کار کرده‌اند. به گونه‌ای که امثال فیثاغورث و فارابی را نه‌تنها ریاضی‌دان بلکه موسیقی‌دان نیز می‌توان برشـــمرد. در این زمره، می‌توان از ارسطو، تالس، ابوعلی‌سینا، لایب نیتز، انیشتین و بقیه نام برد. ارسطو موسیقی را یکی از شاخه‌های ریاضی می‌دانسته و فیلسوفان اســـلامی نیز این نظر را پذیرفته‌اند، مانند ابن‌سینا که در بخش ریاضی کتاب شفا، از موسیقی نام برده و بر این باور بوده اســـت که موسیقی، علمی است ریاضی کـــه در آن، از چگونگی نغمه‌ها از نظر ملایمت و ســـازگاری و چگونگی زمان‌هـــای بین نغمه‌ها، بحث می‌شـــود. ابونصر فارابی هم بر این عقیده بوده است که موسیقی، علم شناسایی الحان است و شامل دو بخش موسیقی عملی و موسیقی نظری است.

دســـته ســـوم: مشـــابهت هنری اما شاید شگفت‌انگیزترین شاهد موجود در زمینهٔ تشابه موسیقی و ریاضیات، در تأثیر یادگیری این دو «هنر» در کنار هم، نهفته باشد. نتایج پژوهشی نشان می‌دهد کودکانی که پیانو می‌نوازند، در جورچینی، بازی شطرنج و استنتاج ریاضی، از مهارت‌های اســـتدلالی بالاتری برخوردارند (موتلوک، ۱۹۹۷). از این گذشـــته، در یک بررسی که توســـط هِنل (۱۹۹۶) انجام پذیرفت، مشاهده شد که درصد دانشجویان ریاضی که در دوره کارشناسی، درس موسیقی گرفته‌اند، یازده درصد بیشتر از مقدار میانگین برای همه دانشجویان است. محقق دیگری به نام راشِر (۱۹۹۷) نشـــان داد که آموزش موســـیقی در سنین خردسالی، می‌تواند در رشد سلول‌های عصبی که برای درک پیچیدگی‌های ریاضی و مفاهیم علمی لازم است، مؤثر باشد. در همین راستا، گاردنیر (۲۰۰۰) دریافت که آموزش‌های ابتدایی در موسیقی و هنرها، می‌تواند

بر روی نمرات ریاضیات کودکان مؤثر باشد و آنان را در کسب مهارت‌هایی در ریاضی و زبان، انعطاف‌پذیر سازد.

حال که انگیزه‌هـــای لازم را برای این ارتباط مرور نمودیـــم، در ادامه هر کدام از این مشـــاهدات را به‌طور دقیق‌تر تبیین می‌نماییم. برای این منظور، ابتدا رابطهٔ ســـاختاری ریاضیات و موسیقی را از ســـه چشم‌انداز متفاوت بررسی می‌کنیم.

چشم‌انداز اول: شـــرح ایده‌هایـــی اســـت دربارهٔ هم‌آهنگـــی (هارمونی)، پرده و نحوهٔ کوک کردن ســـاز که یونانی‌های باســـتان نخســـتین بار بیـــان کردند و همچنین، چگونگی کشف ارتباط ریاضیات و موسیقی توسط فیثاغورث است. **چشم‌انداز دوم**، نمونه‌هایی از الگوهای ریاضی در آهنگ‌ســـازی را نشان می‌دهد. در نهایت، آخرین چشـــم‌انداز نگاهی به ویژگی‌های هنری ریاضیات[۲] دارد. در تبیین مشاهدهٔ دوم نگاهی کوتاه به زندگی سه دانشمند و ریاضی‌دان برجستهٔ تاریخ (یعنی فارابی، انیشتین و ابوعلی‌سینا) خواهیم داشت. در پایان، شاهد ســـوم را که به نوبه‌ای ملموس‌ترین شاهد است، و به بررســـی امتیاز یادگیری موسیقی در زندگی افراد می‌پردازد، بیان می‌کنیم.

ارتباط ساختاری

چشـــم‌انداز اول: آهنگ و تنظیم، استنباط فیثاغورثی از موسیقی

در یونان باســـتان، موسیقی و حساب و هندسه در کنار نجوم، تشکیل علوم چهارگانه را می‌دادند و در واقع یونانیان قدیم به این چهار شـــاخه از علم، به دید واحد ریاضیات نگاه می‌کردند. در آن دوران از تمدن بشـــری، موســـیقی به‌عنوان علمی مطرح بود که توســـط آن، روابط و نســـبت‌های ریاضی به عمل تجربه می‌شد و به موســـیقی در مدارس، به اندازهٔ حساب، هندسه و نجوم بها داده می‌شد. دانش‌آموزان مجبور بودند در موسیقی نیز به اندازهٔ ســـه علم دیگر، معلومات کسب نمایند. در تقســـیم‌بندی علوم در یونان قدیم، از ریاضی به‌عنوان علم مطالعهٔ تغییرناپذیرها یاد می‌کردند. آن‌ها این مقولهٔ علمی را به دو دستهٔ بزرگ‌تر یعنی علوم مربوط به مقادیر گسسته[۳] و علوم مربوط به مقادیر پیوسته[۴] تقسیم‌بندی کرده بودند که مقادیر گســـسته، شامل دو علم از علوم چهارگانه یعنی حساب و موسیقی بود. آن‌ها مقوله‌های مربوط به حساب را معادل بررسی مقادیر قابل شمارش و گسستهٔ مستقل و موسیقی را بررسی مقادیر گسسته‌ای که با یکدیگر در تناسب و ارتباط هستند، می‌دانستند. در مقابل علوم مقادیر گســـسته، علوم مقادیر پیوسته وجود داشـــت که شامل هندسه و نجوم بود. هندسه به بررسی ســـکون و نجوم به بررسی هر آنچه به حرکت مربوط می‌شد، می‌پرداخت. بنابراین همان‌گونه که از این تقسیم‌بندی برمی‌آید جایگاه موسیقی هم‌ردیف سایر شاخه‌های علم ریاضی بوده است. اما در یک کلام شاید بتوان علم موسیقی‌ای را که یونانیان باستان آن را تعریف کرده‌اند، علم بررســـی روابط بین صداهای خوشایند و ناخوشـــایند[۵] نامید. تالس از بزرگ‌ترین متفکران یونان باستان است و بسیاری از دانشـــمندان او را پدر علم و بعضی از موســـیقی‌دانان پدر موســـیقی می‌داند. شاید تعریف او از موسیقی بعد از گذشت بیست و شش قرن، هنوز یکی از زیباترین تعریف‌ها باشد:

«موسیقی، هارمونی‌ای از تضادها، جمعی از اضداد و آشتی عناصر متضاد است... موسیقی اساس یکپارچگی وجود در طبیعـــت و بهترین حکمران در عرصه گیتی است. موسیقی جهان هســـتی را ملبس به هارمونی و قانون‌گرایی می‌کند و روش خردمندانه‌ای برای زندگی ارائه می‌دهد. موســـیقی یگانگی و وحدت را به ارمغان می‌آورد.»

نت و تم. روزی فیثاغورث[۶] جـــوان از کنار مغازه آهنگری می‌گذشـــت کـــه ناگهان صدایی بـــا فواصل منظـــم که از طرف ســـندان می‌آمد توجـــه او را جلب کرد. فیثاغورث متوجه شـــد که وزن چکشی که آهنگر از آن استفاده می‌کند، در صدا مؤثر است. ممکن است او نخستین کسی باشد که تطابق آکوستیکی تارهایی با طول‌های متناسب را توضیح داده باشد. هنگامی که تارهایی با کشیدگی یکسان طول‌های متناسب را (بدون توجه به جنس آن: فولاد، ریســـمان و...) به ارتعاش در می‌آوریم، صداهایی با فرکانس یکســـان تولید می‌کند. به‌عنوان مثال، زهی با طول ۶۰ سانتی‌متر X مرتبه در هـــر ثانیه لرزش خواهد کـــرد، آن‌گاه زهی با طول ۳۰ سانتی‌متر، ۲X مرتبه (یعنی دو برابر) لرزش خواهد کرد. به‌علاوه این دو فرکانس اکتاو کاملی را خلق می‌کند.

اهمیت عدد ۱۲. مغز با استفاده از ریاضیات، دستور زبان موسیقی را دیکته می‌کند.

تقارن یکی از مباحث هندســـه است. با این وجود می‌تـــوان آن را در کار بســـیاری از موســـیقی‌دانان یافت. آثار باخ[۷] شـــاید مشـــهورترین نمونـــه تقارن در موسیقی باشـــد. دقت و توجه زیاد به قوانین هارمونی، وضوح ریتم و عبارت‌نویســـی در آثار باخ، آن‌ها را برای شـــنوندگان، به آثاری مملو از ریاضی همراه با چاشنی احساس تبدیل کرده است. قطعات موسیقی که باخ در ســـال ۱۷۴۷ نوشته، یکی از بارزترین این نمونه‌هاست. فیثاغورث گام‌های دیگری نیز برداشت. او می‌دانست که کوچک‌ترین عددی که بیشترین خاصیت تقسیم شدن

را دارد، ۱۲ اســت. پس عدد ۱۲ مناسب‌ترین عدد در موسیقی است. پس از گذشت هزار سال، موسیقی‌دانان هنوز این ایده را تصدیق می‌کنند. اوایل قرن بیســتم، آرنولد شوئنبرگ[۸] روش جدیدی برای آهنگ‌سازی ارائه کرد. در این روش، هیچ‌کدام از فاصله‌ها لحاظ نشده بود، در حالی‌که به همه آن‌ها توجه شده بود. او این روش را «دوازده پرده‌ای» نامید که در آن، همه فاصله‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شــوند و همهٔ نت‌ها، اهمیت یکسانی دارند.

ملودی. آماده‌ســازی یک ملودی در یکی از آلات موســیقی و انگشــت‌گذاری صحیح در ترتیب نت‌ها، در واقع نوعی مســئله ریاضی است. این همان مفهوم سازگاری موجود در هر دو «هنر» است. استفاده از آلات موسیقی مختلف برای نواختن ملودی مشابه ساختارهای ریاضی اســت. حتی اســتفاده از کلیدهای متفاوت در نواختن ملودی مشابه نیز، با تفکر ریاضی مرتبط است. موسیقی‌دان خوب، اغلب می‌تواند به آهنگی گوش دهد و بدون اینکه آن را قبلاً تمرین کرده باشد یا ترتیب نت‌ها را بداند، آن آهنگ را بنوازد، زیرا او ترتیب و شــکل‌های آشنا را تشخیص می‌دهد. این نوع تفکر، بسیار شبیه به کسی است که ریاضیات می‌خواند.

نظام‌های شمارشــی در موســیقی: دو نظام شمارشــی در موســیقی وجود دارد که یکــی در گام و دیگــری در کلید اســت. ابتدا به این نظــام در گام می‌پردازیم. هفت نت در گام وجود دارد. ترتیب فاصله‌ها با فاصله بین این هفت نت است که یک قطعه موسیقی را، بی‌همتا می‌کند. فرمول گام‌ها به‌صورت پرده، پرده، نیم‌پرده، پرده، پرده، پرده، نیم‌پرده (روش دوازده‌پرده‌ای) است. بنابراین، اولین برخورد با موسیقی، فهمیدن دوازده نت گام نیم‌پرده است. اگر در گام شش نت وجود داشت، می‌توانستیم آن‌ها را به‌صورت فاصله مساوی یک پرده از یکدیگر در نظر بگیریم، اما هفت نت وجود دارد. بنابراین احتیاج به دو نیم پرده اســت. این هفت نت را کسی از زمان‌های قدیم انتخاب نکرده اســت، آن‌ها را موسیقی یا دقیق‌تر بگوییم، کسر انتخاب کرده است. آکوردها از ترکیب نت‌های مختلف گام استفاده می‌شود. ساده‌ترین آکورد[۹]، آکورد سه‌تایی[۱۰] است که در آن، از سه نت گام اســتفاده می‌شــود. می‌توان از نت‌های دیگر گام، برای بزرگ‌تر شدن آکورد استفاده کرد. نظام شمارشی دیگر، در کلید است. هر یک از هفت نت گام، می‌تواند به‌عنوان شــروع‌کننده یک آکورد حساب شود و اغلب به‌صورت اعداد یونانی نوشته می‌شوند. ممکن است به‌صورت زیر نیز دیده شوند:

I-II-III-IV-V-VI-VII

اســتفاده از این اعــداد، روش خوبی اســت زیرا می‌تواند ماژور یا مینور بودن آکورد را نشــان دهد. در واقع، مهم اســت که بدانیم کدام آکورد مرتبط به کدام کلید است. آهنگ‌ســازان، اغلب آهنگ‌ها را با استفاده از اعداد می‌نویسند. اگر دامنه صدای خواننده را ندانند، از کلید مناســبی در اســتودیو اســتفاده می‌کنند. در این هنگام اســت که نوازنده، اعداد را تبدیل به آکورد می‌کند. نشــویل[۱۱] در این نوع نت‌نویسی مشهور است. البته کسرهای میزان و ضرب (سرعت) هم، با ریاضیات مرتبط هستند. تجزیه‌وتحلیل موسیقی نشان می‌دهد که اعداد در آن، نقش برجســته‌ای دارند و هنگامی که اعداد را به موسیقی تبدیل می‌کنیم، دلنشین و گوش‌نواز می‌شود. مردم خیلی زود دریافتند که نواختن هم‌زمان هر دو نتی همواره خوش‌آیند (هم‌ســاز) نیست. علاوه بر این، یونانیان باســتان کشف کردند که نتی با بسامد (فرکانس) مشخص را فقط با نت‌هایی می‌توان ترکیب کرد که بسامدشــان مضرب صحیحی از بسامد آن نت باشد. هم‌چنین، بررســی آواهای مختلف نشان داد که هنگام نواختن نت پایه، مضرب‌های صحیح بسامد پایه، همیشه با شدتی ضعیف‌تر، نت پایه را همراهی می‌کنند.

چشم‌انداز دوم: موسیقی ریاضیاتی؛ عددهای فیبوناچی و نسبت طلایی در ترکیبات موسیقیایی. مســائل مربوط بــه تعریف پرده و کوک‌ســاز، یکی از جنبه‌های ورود اندیشه‌های ریاضی به دنیای موسیقی اســت. اما دســت‌کم در تعبیر نوین، موسیقی را فقط نت و هارمونی نمی‌سازد. جنبه مهم‌تر، تغییرات زمانی نت‌هاســت یعنی آنچه به ضرب آهنگ (ریتم) و نغمه (ملودی) مربوط می‌شود. البته تنها نمادگذاری موسیقی نیست که همهٔ جنبه‌هایش با ریاضیات رابطه دارد، بلکه در برخی قطعات موســیقی، می‌توان تأثیرات حساب و هندسه را هم دید. یکی از جنبه‌های بسیار جالب مفاهیم ریاضی که در ســاخت قطعات موسیقی ظاهر می‌شود، عددهای فیبوناچی و نسبت طلایی است.

اما مهم‌ترین ویژگی این عددها این است که دنباله کســرهای فیبوناچی (یعنی نسبت هر عدد فیبوناچی به نزدیک‌ترین عدد کوچک‌تر از آن)، به ســمت حدی ثابت (۰۰۰۱/۶۱۸۰۳۳۹۸) میل می‌کند که به نسبت طلایی، تناسب طلایی، یا مقطع طلایی معروف است. تعبیر هندسی نسبت طلایی شناخته‌تر است: تقسیم خط به دو قســمت نابرابر هنگامی به نســبت طلایی است که نسبت طول خط به طول بخش بزرگ‌تر برابر با نسبت طول بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر باشد.

راشر (۱۹۹۷) نشان دادَ که آموزش موسیقی در سنین خردسالی، می‌تواند در رشد سلول‌های عصبی که برای درک پیچیدگی‌های ریاضی و مفاهیم علمی لازم است، مؤثر باشد

چون نسبت طلایی، زیبا، پویا و متعادل انگاشته می‌شود، در هنر به ویژه در نقاشی و عکاسی، کاربردهای گوناگون پیدا کرده است. اغلب عناصر مهم تصویر، درازا یا پهنای تصویر را به نسبت طلایی تقسیم می‌کنند اما این تقسیم‌بندی، همیشه آگاهانه نیست، بلکه از درک زیبایی و حس هماهنگی سرچشمه می‌گیرد. بررسی‌های گوناگون نشان داده‌اند که همین مفهوم، در ساخت قطعات موسیقی نیز بسیار معمول است. نسبت طلایی به صورت کسرهای فیبوناچی، یا برای تغییر ضرب آهنگ و یا گستراندن ملودی به کار برده می‌شود. نمونه‌های کاربرد آگاهانهٔ این نسبت را در «سیستم آهنگ‌سازی شلینگر»[۱۲] می‌توان دید.

شاید آن‌قدر مهم نباشد که بدانیم افراد در کاربرد یا ادراک نسبت طلایی آگاهند یا ناآگاه، این نکته مهم است که زیبایی و هماهنگی را می‌توان دست‌کم از این جنبه با ابزار ریاضی بیان کرد. رابطه بخش‌بندی قطعه موسیقی با کسرهای فیبوناچی و رابطه نسبت عددهای صحیح به فاصله فیثاغورثی موسیقی، نمونه‌هایی از این واقعیت هستند که گاهی هماهنگی را نیز می‌توان با اعداد (حتی عددهای صحیح) توصیف کرد و این هماهنگی، جنبه‌ای ریاضی دارد و شاید از این راه بتوان این ایده را مطرح کرد که «زیبایی، در ذات ریاضیات نهفته است».

چشم‌انداز سوم: ریاضیات موسیقیایی؛ جلوه‌های یک‌جنبه هنری از ریاضیات

با توجه به ذات هنری ریاضیات، گرایش ریاضی‌دانان به موسیقی را نمی‌توان تنها به جنبه‌ها و الگوهای ریاضیاتی در آوا، هارمونی و ساخت قطعه‌های موسیقی نسبت داد. ریاضی‌دان بودن به معنای کشف اعداد در هر مکانی و تنها مرتبط ساختن مسائل با مفاهیم ضمنی ریاضیات نیست. بنابراین، برای یافتن ارتباط اصولی بین ریاضی و موسیقی، باید تراز دیگری را جست‌وجو کرد.

همان‌طور که موسیقی‌دان‌ها گاهی ملودی منحصربه‌فرد و ظریفی ارائه می‌دهند یا هارمونی فوق‌العاده‌ای را به‌کار می‌برند، ریاضی‌دان‌ها نیز در جست‌وجوی اثبات‌های ظریف و ساده هستند. علاوه‌بر این، احساساتی که در یافتن پاسخ برای یک مسئله ریاضی بروز می‌کنند، شبیه به احساساتی است که هنگام اجرای قطعه‌ای موسیقیایی ابراز می‌شود. مهم‌ترین جنبه‌ای که در هر دو زمینه وجود دارد، خلاقیت است. شواهد جالب برای این ایده را هنل (۱۹۹۷) ارائه می‌دهد که براساس سه ادعای زیر تاریخ موسیقی را با تاریخ ریاضیات مقایسه کرده است.

۱. ریاضیات بسیاری از ویژگی‌های یک هنر را دارد.

۲. مانند هنر، باید بتوان دوران‌هایی هم چون دوران رنسانس، باروک، کلاسیک و رومانتیک در موسیقی را، در ریاضیات نیز پیدا کرد.

۳. این دوران‌ها، تطابق خوب با دوران‌های موسیقی و بسیاری ویژگی‌های مشترک دارند، اما با دوران‌های مختلف نقاشی و ادبیات تفاوت عمده دارند.

با بررسی مفاهیم دوگانی (باروک)، جهان‌شمولی (کلاسیک) و جاودانگی (رومانتیک)، تشابهات زیادی بین سیر تکامل ریاضیات و موسیقی، دیده می‌شود.

ریاضی‌دانان و موسیقی

ابونصر فارابی. ابونصر محمدبن محمد فارابی (۲۵۲-۲۵۹ یا ۲۶۰ هجری قمری) فیلسوف، ریاضی‌دان و موسیقی‌دان بزرگ ایرانی و سر سلسله حکمای اسلامی است که با بررسی آثار حکما و فلاسفه یونان، به‌ویژه ارسطو، اسرار آن‌ها را کشف کرد و مشکلات کتاب‌های آن‌ها را توضیح داد؛ نواقص کار آنان را دریافت و شرح‌هایی بر آثار ارسطو نوشت و بدین سبب به وی لقب **معلم ثانی** را دادند. فارابی از بزرگ‌ترین نویسندگان کتاب‌های موسیقی است. فارابی علاوه‌بر شرح و توضیح آثار حکمای یونان، خود نیز آثار مهمی به‌وجود آورد و کتاب‌ها و رساله‌های متعددی در حکمت، فلسفه، منطق، نجوم و موسیقی نوشت. مجموعاً ۱۲۰ جلد کتاب و رساله را به او نسبت می‌دهند. از جمله کتاب‌های او در موسیقی عبارت‌اند از:

۱. المدخل الی صناعة الموسیقی
۲. کلام فی‌الموسیقیا و احصاء الابقاع
۳. فی‌النقرة مضافا الی الایقاع
۴. الحصاء العلوم
۵. الموسیقی الکبیر
۶. رساله‌ای موسوم به مقالات

در کتاب احصاءالعلوم و در فصل مربوط به موسیقی، رئوس مطالب مربوط به موسیقی نظری و موسیقی عملی و برنامه‌ای را که برای اندیشمندان و پژوهشگران این علم ضروری است، بیان می‌دارد و دربارهٔ طرز تألیف الحان و تعیین نسبت بین وزن نغمه‌ها، بحث می‌کند. از تألیفات و تصنیع الحان موسیقی و تلفیق آن با کلام منظوم گفت‌وگو می‌کند و اینکه آن را چگونه باید به کار برد تا تأثیر الحان موسیقی، بیشتر گردد و منظور حاصل شود. مهم‌ترین و مفصل‌ترین کتاب فارابی و بزرگ‌ترین اثری که تاکنون در موسیقی مشرق زمین نوشته شده، **الموسیقی الکبیر** است که در دو جلد تهیه شده است؛ جلد اول که مفصل‌تر بوده اکنون در دست است و جلد دوم آن‌که کوتاه‌تر بوده، از بین رفته است. فارابی در این کتاب، درباره اصول فیزیکی صوت و دیگر مطالب مربوط

تجزیه‌وتحلیل موسیقی نشان می‌دهد که اعداد در آن، نقش برجسته‌ای دارند و هنگامی که اعداد را به موسیقی تبدیل می‌کنیم، دلنشین و گوش‌نواز می‌شود

بـــه آن تحقیقاتی دارد. فارابی نه‌تنها یکی از بزرگ‌ترین دانشـــمندان علم نظری موســـیقی بود، بلکه در عمل موسیقی نیز استادی به‌نام و زبردست و نوازنده‌ای توانا و ماهر بود و معروف است که در نواختن قانون، مهارت داشته است.

فارابی در کتاب الموســـیقی الکبیر، پس از تعریف موســـیقی، راجع به موسیقی‌شناســـی بحث می‌کند و از تأثیر آن در روح از دید روان‌شناســـی و تصویری که از شـــنیدن الحان در ذهن حاصل می‌شـــود، گفت‌وگو می‌نماید و صداشناسی و موسیقی عملی و نظری را با هم بررسی می‌کند. او آهنگ‌ها را از حیث ایقاع، به دو بخش متصل و غیرمتصل تقسیم می‌کند و ضرب متصل یا دو ضرب و ضرب غیرمتصل را که ضرب مخلوط و پیچیده نامیده شده است، توضیح می‌دهد. هم‌چنین، به توضیح و توصیف بعضی از سازهای زمان خود و پیش از اسلام پرداخته و چون عود را کامل‌ترین ســـازها می‌دانسته، نخست آن را برگزیده و بر روی آن بحث کرده است.

ابن‌سینا. حسین‌ابن‌ســـینا ابن عبدالله معروف به ابن‌سینا دانشـــمند، فیلسوف و پزشـــک بزرگ ایرانی قرن چهار و پنجم هجری قمـــری، از بزرگان و علمای موســـیقی‌دان زمان خود بوده اســـت. او مباحث اصلی موسیقی را با نهایت دقت تشریح نموده و در این مباحث پیرو فارابی است، عقاید او را تشریح می‌کند و در بسیاری موارد دارای ابداعات و ابتکار است. ابن‌سینا در تألیفات موسیقی خود در جستارهای گوناگون وارد شده و آن‌ها را مختصر، مفید و با دلایل منطقی بیان کرده که نه تنها به اصول فیزیکی و ریاضی تکیه می‌کند، بلکه دامنه بحث را به فلسفه و علم‌النفس نیز می‌کشاند.

ابن‌سینا سه کتاب موسیقی - دوتا به زبان عربی و یکی به زبان فارســـی دری - دارد که از همه مبسوط‌تر و مهم‌تر، بیســـت‌هزار کلمه از فصل دوازدهم از بخش ریاضی کتاب الشـــفا و بعدی ســـه هزار کلمه در کتاب النجات اســـت که خلاصه‌ای از همان کتاب شفاست و ســـومی به فارسی، در کتاب دانش‌نامه که خلاصه‌ای از کتاب النجات است، قرار دارد.

امتیازات یادگیری موسیقی

هنگامی که مزایای آموزش موســـیقی بر همگان آشکار گردد، دســـت‌اندرکاران امر آموزش‌و برنامه‌ریزان امور تحصیلی، موظف خواهند شـــد در همه سطوح، از آموزش موسیقی به هنرآموزان مجرب، حمایت جدی به عمل آورند. بدین ترتیب، هر دانش‌آموز از مزایای آموزش هنر به‌صورت کلی و نیز آموزش موسیقی به صورت ویژه، بهره‌مند خواهد گردید.

موفقیت در جامعه. موســـیقی بخشی از ساختار جامعه اســـت و ایـــن مهم‌ترین دلیل لـــزوم، یادگیری موسیقی توسط همه کودکان است. همه افراد در همه جوامع و فرهنگ‌ها به ارزش واقعی موسیقی پی برده‌اند، در حقیقت همه فرهنگ‌های بشـــری، از موسیقی بهره می‌گیرنـــد تا ارزش‌هـــا و باورهای خـــود را بیان دارند. هم‌چنین، نباید اهمیت موسیقی و نقش موسیقی را در اقتصاد هر کشور نادیده گرفت. ارزش موسیقی و اهمیت آن، در شکل بخشیدن به شخصیت و توانایی‌های تک تک افراد جامعه نیز اثبات شده است.

موفقیت در مدرسه. می‌توان پیش‌بینی کرد که موفقیت در جامعه، پیامد موفقیت در دوران تحصیل در مدرسه است. هر هنرآموز موسیقی یا والدین کودکانی که به یادگیری موســـیقی می‌پردازند، می‌توانند درباره یادگیری موسیقی بر دانش‌آموزان و میزان موفقیت آن‌ها در تحصیل، نکاتی را یـــادآوری کنند. مهارت‌هایی که یادگیری موسیقی موجب تقویت آن‌ها می‌شود عبارت‌اند از خواندن، برقراری ارتباط و شناختی که این سه دسته مهارت، در همه بخش‌هـــای برنامه تحصیلی مؤثرند و نقش مهمی ایفا می‌کنند. علاوه بر این، پژوهش‌هایی که به تازگی درباره موســـیقی، یادگیری و نقش آن در موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان انجام شده، نشانگر آن است که یادگیری موسیقی دانش‌آموزان را یاری می‌کند تا بیاموزند چگونه می‌توانند بدون روی آوردن به خشونت و رفتارهای ناهنجار، خود را با محیط مدرسه و شرایط آن هماهنگ سازند.[۱۲]

تقویت هوش. داده‌های حاصل از مطالعات انجام یافته درباره هوش کودکان، که تعداد این مطالعات نیز روزبه‌روز افزایش می‌یابد، نشانگر این حقیقت است که موسیقی و نیز آموزش آن به کودکان، آنان را باهوش‌تر می‌کند. آنچه تازه و به‌ویژه جالب به نظر می‌رســـد این است که ترکیب پژوهش‌های انجام یافته در حوزه علوم رفتاری و تحقیقاتی که در حوزه علوم مغز و اعصاب انجام یافته، نشانگر آن اســـت که چگونه آموزش و یادگیری موســـیقی می‌تواند به صورت فعال، موجب گســـترش فعالیت‌های مغزی شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله ارتباط ریاضی و موسیقی از سه دیدگاه مختلف، تبیین شد. در دیدگاه اول، سعی بر این بود که از سه چشم‌انداز مختلف، به این ارتباط پرداخته شـــود. چشـــم‌انداز اول، درک خاص موســـیقی توسط

پژوهش‌هایی که به تازگی درباره موسیقی، یادگیری و نقش آن در موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان انجام شده، نشانگر آن است که یادگیری موسیقی دانش‌آموزان را یاری می‌کند تا بیاموزند چگونه می‌توانند بدون روی آوردن به خشونت و رفتارهای ناهنجار، خود را با محیط مدرسه و شرایط آن هماهنگ سازند

یونانیان باستان را نشان داد که به ملودی و حرکت کمتر از پرده، تنظیم و هارمونی استاتیک اهمیت می‌دهد. در چشم‌انداز دوم، مفهوم تقسیم طلایی در ارتباط با نسبت‌های عددی و پیدایش آن‌ها در ترکیبات متعدد مطرح شد. با این حال احساسی‌ترین نگاه چشم‌انداز سوم بود که در آن روابط، با در نظر گرفتن جنبه هنری، طرز تفکر ریاضیاتی مشخص شدند.

در ادامه، در خصوص ارتباط ناشناخته ذات موسیقیایی ریاضی و الهاماتی که اندیشمندان و علم دوستان از هنر و موسیقی گرفته‌اند به اختصار اشاره شد. در پایان، نقش غیرقابل انکار موسیقی در آموزش مورد تأکید قرار گرفت.

البته این موارد، تنها نمونه‌هایی از بررسی چنین ارتباطی هستند و می‌توان مقایسه‌های دیگری نیز انجام داد. با این حال، این سه ارتباط شاید بیشترین مفاهیم و ایده‌های مطرح شده را ارائه دهند. هر رابطه‌ای بین ریاضی و موسیقی وجود داشته باشد، مشخص است که هردوی آن‌ها همچنان، جزو رشته‌های دشوار و بهتر است یکی بر دیگری تحمیل نشود. تلاش برای توضیح تمام شکل‌های موسیقی توسط ریاضیات، اشتباه است. از طرف دیگر، مطالعه ریاضیات از لحاظ موسیقی‌شناسی هم بی‌فایده است ولی جا دارد که این روابط در آموزش ریاضی مطرح شود.

مهم است که به افراد نشان دهیم ریاضیات از یک جنبه بیشتر هنر است تا یک علم. شاید با این عمل، مفهوم رایج آن تغییر کند و افراد ماهیت و جهان‌شمولی آن را بهتر درک کنند.

تشکر و قدردانی

سپاس‌گزاریم از آقایان دکتر اسمعیل بابلیان و دکتر عین‌الله پاشا که با راهنمایی و نظرات ارزنده خود، مشوق ما بودند و ویراستاری ایشان بر غنای متن افزوده است.

پی‌نوشت‌ها

1. Gauss

۲. لازم به توضیح است که اکثر مطالب این بخش، برگرفته از بیر (۲۰۰۸) و ماروف (۱۹۸۳) است.

3. discrete

4.continous

5. consonance و dissonance

۶. ریاضی‌دان معروف و از شاگردان تالس

7. Bach

8. Shoenberg

۹. هرگاه بیش از دو نت با هم در یک زمان به صدا درآیند تشکیل آکورد می‌دهند.

10. Triad

11. Nashville

۱۲. حقایق بی‌شماری نیز درباره ارتباط یادگیری موسیقی با موفقیت دانش‌آموزان در مدرسه وجود دارد که در زیر به چند مورد اشاره می‌شود.

منابع

1. Beer. M, How do mathematics and music relate to each other? *Mathematical Spectrum,* 41, 36- 42.

2. Maeroff. G, (1983), What Students Need to Know and be Able to Do, *Academic preparation for College,* New York.

3. Catterall. J, Chapleau. R, and lwanaga. J, (1999), Involvement in the Arts and Human Development: General Involvement and Intensive involvement in Music and Theater Arts, *The Imagination Project at UCLA Graduate School of Education and Information Studies.*

4. Droscher. E, Profile of SAT Program Test Takers, priceton, NJ: The College Entrance Examination Board, 2001.

5. Hammann. D. L, and Walker. L. M, (1993), the Case for music in the School, *Music teacher as role models for African American students Journal,* 41.

6. Hammill. T, Garland, kahn, and Stenstedt, (1995), *Math and Music: Harmonious Connections.*

7. Rauscher. F, (1997), Music training causes long - term enhancement of pre - school children's spatial - temporal reasoning.

8. Gardiner. M, (2000), Music, learning and Behavior: A Case for Mental Stertching, *journal for learning through music.*

9. Graziano. A, Peterson. M, And Gordon shaw, (1997) Enhanced learning of proportional math through music traning, Neurological.

10. Green. M, (2000), Recording Academy President and CEO at 42 nd Annual Grammy Awards.

11. Henle. J, (1996), Classical mathematics, *The American Mathematical Monthly,* 103 (1), 18- 29.

12. Leibniz. G, music.

13. Miller. A, (2006), "A Genius Finds Inspiration in the Music of Another", *The New York Times.*

14. Motluk. A, (1997), Can Mozart make maths add up? New Scientist 153, 17.

15. National Center for Education Statistics, *First Follow - up,* Washington DC, 1990.

16. Sergent. J, Zuck. E, Tenial. S, and MacDonall. B, (1992), Distributed neural vetwork underlying musical sight reading and keyboard performance. *Science,* 257, 106 - 109.

۱۷. رضا داوری، (۱۳۸۹)، فارابی فیلسوف فرهنگ، انتشارات سخن

۱۸. حسن مشحون، (۱۳۸۸)، تاریخ موسیقی ایران، انتشارات نشر نو